Відкрита студентська олімпіада механіко-математичного факультету

В.Б. Брайман

Чергове математичне змагання студентів Київського національного університету імені Тараса Шевченка було проведено онлайн 15 лютого 2022 року. Роботи із розв'язаннями задач надійшли від студентів механіко-математичного факультету, факультету комп'ютерних наук та кібернетики і фізичного факультету КНУ імені Тараса Шевченка, Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, Українського Католицького Університету, Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, Twente Pathway College (Нідерланди), Білоруського державного університету, Ягеллонського університету (Польща), а також від учнів ліцею № 171 "Лідер" і Політехнічного ліцею НТУУ "КПІ" м. Києва.

Нижче ми наводимо прізвища переможців, умови та розв'язання задач.

Переможці олімпіади серед студентів 1–2 курсів

I місце

Масалітін Олексій Юрійович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)

II місце

Андрієць Семен Олександрович (ліцей № 171 "Лідер", 11 клас)
Романус Ярослав Ігорович (ф-т прикладних наук УКУ, 2 курс)
Солоджук Гліб Ігорович (ф-т прикладних наук УКУ, 2 курс)
Уразовський Артем Владиславович (ф-т кібернетики КНУ, 1 курс)

III місце

Колодач Яна Григорівна (ф-т кібернетики КНУ, 1 курс)
Вахітов Антон Володимирович (Twente Pathway College, 1 курс)
Логвін Максим Вікторович (ф-т математики і інформатики ХНУ, 1 курс)
Чуйко Віктор Олексійович (мех-мат ф-т КНУ, 1 курс)

Переможці олімпіади серед студентів 3–4 курсів

I місце

Штефан Дмитро Ігорович (мех-мат ф-т КНУ, 4 курс)

II місце

Коваль Вадим Олегович (ф-т математики та інформатики Ягеллонського університету, 2 курс)
Пушкар Максим Володимирович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Шашков Владислав Костянтинович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)

III місце

Азаров Євгеній Левович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Качайкін Марко Владиславович (мех-мат ф-т КНУ, 3 курс)
Кондратенко Олег Олегович (ф-т кібернетики КНУ, 4 курс)
Котельникова Валерія Геннадіївна (ф-т кібернетики КНУ, 4 курс)

Завдання для 1–2 курсів

1. Дано $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a \neq b$. Знайти всі многочлени P, Q такі, що

$$P(x) + Q(x) = P(x+a) + Q(x-a) = P(x+b) + Q(x-b)$$

при всіх $x \in \mathbb{R}$. *(В.К. Шашков)*

2. Чи існує матриця $A \in M_{28}(\mathbb{Q})$ така, що $A^n = E$ при деякому $n \in \mathbb{N}$, але $A^n \neq E$ при $1 \leq n \leq 2022$? (Тут E — одинична матриця.) *(А.В. Бондаренко)*

3. Нехай $n \geq 3$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, \ldots, b_n$ — додатні дійсні числа такі, що $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$ та $a_i e^{b_i} + a_j e^{b_j} \leq 1$ при всіх $i \neq j$. Довести, що $\sum\limits_{i=1}^{n} e^{-b_i} \geq 2$. *(О.В. Руденко)*

4. На параболі $y = x^2$ відмітили точки A та B. Дотичні до параболи у точках A та B перетинаються в точці C, бісектриса кута ACB перетинає параболу у точці K, а дотична до параболи у точці K перетинає пряму AB у точці N. Довести, що $\angle KCN = 90^\circ$. *(В.Б. Брайман)*

5. Знайти всі функції $f \in C^{(1)}(\mathbb{R})$ такі, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(a) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'(b)}{3}$$

при всіх $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. *(О.Г. Кукуш)*

6. Множина $\mathcal{M} \subset M_3(\mathbb{Z}_2)$ є такою, що $\det(A+B) \neq 0$ для довільних $A, B \in \mathcal{M}$, $A \neq B$. Знайти найбільшу можливу кількість матриць у множині $\mathcal{M}$. *(В.Б. Брайман)*

Завдання для 3–4 курсів

1. Див. задачу **2** для 1–2 курсів.

2. Нехай ξ — невід'ємна випадкова величина із функцією розподілу F такою, що $x(1 - F(x)) \to 0$, $x \to +\infty$. Чи обов'язково $\mathsf{M}\xi < +\infty$? *(О.Г. Кукуш)*

3. На вимірному просторі $(X, \mathcal{F})$ задано міри μ та μ_n, $n \geq 1$, такі, що $\mu_n(X) = 1$, $n \geq 1$, та $\mu(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mu_n(A)$, $A \in \mathcal{F}$. Розглянемо послідовність вимірних функцій $f_k : X \to \mathbb{R}$, $k \geq 1$.

а) Відомо, що $f_k \xrightarrow{\mu_n} 0$, $k \to \infty$, при кожному $n \geq 1$. Чи обов'язково $f_k \xrightarrow{\mu} 0$, $k \to \infty$?

б) Відомо, що $f_k \in L_1(X, \mu)$, $k \geq 1$, та $f_k \to 0$, $k \to \infty$, у просторі $L_1(X, \mu_n)$ при кожному $n \geq 1$. Чи обов'язково $f_k \to 0$, $k \to \infty$, у просторі $L_1(X, \mu)$? *(В.М. Радченко)*

4. Нехай $n \geq 2$, $F_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2n \sin^2 \frac{t}{2}}, & t \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{n}{2}, & t = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$ — ядро Фейєра. Покладемо

$$f_n(t) = F_n\left(t - \tfrac{\pi}{2n}\right) + F_n\left(t + \tfrac{\pi}{2n}\right), \ t \in \mathbb{R}.$$

Довести, що $f_n(t) \leq f_n(0)$ при всіх $t \in \mathbb{R}$. *(І.О. Шевчук)*

5. Нехай $\mathbb{Z}_+$ — множина цілих невід'ємних чисел. Чи існує метрика $\rho : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ така, що $\rho(a, \rho(b, c)) = \rho(\rho(a, b), c)$ при всіх $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$? *(О.Б. Толесніков)*

6. Див. задачу **6** для 1–2 курсів.

Розв'язання задач
Завдання для 1–2 курсів

1. Покладемо $R(x) = P(x+a) - Q(x)$. За умовою

$$R(x) = P(x+a) - Q(x) = P(x) - Q(x-a) = R(x-a),$$

тому $R(x) = \mathrm{const}$. Отже, $P(x+a) - Q(x) = \mathrm{const}$. Аналогічно $P(x+b) - Q(x) = \mathrm{const}$, тому $P(x+a) - P(x+b) = \mathrm{const}$. Звідси випливає, що $P(x) = cx + d_1$ та $Q(x) = cx + d_2$ при деяких $c, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Усі такі пари многочленів задовольняють умову.

Відповідь: $P(x) = cx + d_1$, $Q(x) = cx + d_2$, де $c, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ довільні.

2. Нехай

$$B_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{Q})$$

— матриця-перестановка. Для цієї матриці $B_k^k = E$ та $B_k^j \neq E$ при $1 \leq j < k$. Тому якщо $A \in M_{28}(\mathbb{Q})$ — блочна матриця, на діагоналі якої стоять блоки B_2, B_3, B_5, B_7 та B_{11}, то $A^n = E$, коли n ділиться на кожне з чисел $2, 3, 5, 7, 11$. Найменшим таким n є НСК$(2, 3, 5, 7, 11) = 2310 > 2022$.

Відповідь: так, існує.

Зауваження. Покажемо, що існує матриця навіть меншого розміру із шуканими властивостями. Покладемо

$$C_1 = (-1),\ C_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{Q}),\ k \geq 2.$$

Нехай $e_1, \dots, e_k$ — стандартний базис в $\mathbb{R}^k$ та $e_{k+1} = -\sum\limits_{i=1}^{k} e_i$. Оскільки $C_k e_i = e_{i+1}$, $1 \leq i \leq k$, та $C_k e_{k+1} = e_1$, неважко перевірити, що $C_k^{k+1} = E$ та $C_k^j \neq E$ при $1 \leq j \leq k$. Тому якщо $A \in M_{23}(\mathbb{Q})$ — блочна матриця, на діагоналі якої стоять блоки C_1, C_2, C_4, C_6 та C_{10}, то найменшим n, при якому $A^n = E$, є НСК$(2, 3, 5, 7, 11) = 2310$.

3. Якщо $a_i e^{b_i} \leq \frac{1}{2}$ при всіх $1 \leq i \leq n$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} e^{-b_i} \geq \sum\limits_{i=1}^{n} 2a_i = 2$. Надалі без обмеження загальності можна вважати, що $\frac{1}{2} < a_1 e^{b_1} < 1$. При $2 \leq i \leq n$ маємо $a_i e^{b_i} \leq 1 - a_1 e^{b_1}$, тобто $e^{-b_i} \geq \dfrac{a_i}{1 - a_1 e^{b_1}}$. Тому

$$\sum_{i=1}^{n} e^{-b_i} - 2 \geq e^{-b_1} + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{1 - a_1 e^{b_1}} - 2 = e^{-b_1} + \frac{1 - a_1}{1 - a_1 e^{b_1}} - 2 =$$
$$= \frac{e^{-b_1} - 2a_1 + 2a_1 e^{b_1} - 1}{1 - a_1 e^{b_1}} = \frac{(2a_1 e^{b_1} - 1)(1 - e^{-b_1})}{1 - a_1 e^{b_1}} > 0.$$

4. Рівняння дотичних до графіка $y = x^2$ у точках $A(a, a^2)$ та $B(b, b^2)$ мають вигляд $y = 2ax - a^2$ та $y = 2bx - b^2$. Ці прямі перетинаються у точці $C(\frac{a+b}{2}, ab)$. Тому

$AC = \sqrt{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(a^2-ab\right)^2} = \frac{|a-b|}{2}\sqrt{1+4a^2}$ і аналогічно $BC = \frac{|a-b|}{2}\sqrt{1+4b^2}$, отже $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\sqrt{1+4a^2}}{\sqrt{1+4b^2}}$. Нехай дотична до параболи у точці $K(k,k^2)$ перетинає прямі BC та AC у точках D та E відповідно (рис. 1). Тоді $\dfrac{AE}{KE} = \dfrac{\sqrt{1+4a^2}}{\sqrt{1+4k^2}}$, $\dfrac{BD}{KD} = \dfrac{\sqrt{1+4b^2}}{\sqrt{1+4k^2}}$.

За властивістю бісектриси $\dfrac{KD}{KE} = \dfrac{CD}{CE}$, а за теоремою Менелая $\dfrac{AN}{BN}\cdot\dfrac{BD}{CD}\cdot\dfrac{CE}{AE} = 1$. Звідси

$$\frac{AN}{BN} = \frac{CD}{BD}\cdot\frac{AE}{CE} = \frac{KD}{BD}\cdot\frac{AE}{KE} = \frac{\sqrt{1+4a^2}}{\sqrt{1+4b^2}} = \frac{AC}{BC}.$$

Отже, CN — бісектриса зовнішнього кута трикутника ABC та $CN \perp CK$.

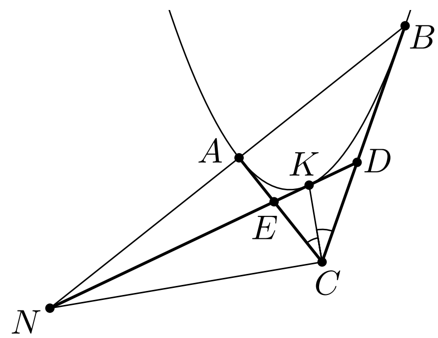

Рис. 1.

Зауваження. Бісектриса кута ACB може перетинати параболу у двох точках K_1 та K_2. Із розв'язання задачі випливає, що у цьому випадку дотичні до параболи у точках K_1 та K_2 перетинають пряму AB у спільній точці.

5. *I спосіб.* При довільному фіксованому $x \in \mathbb{R}$ та всіх $h > 0$ маємо

$$\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h} = \frac{f'(x)+f'(x+h)+f'(x+2h)}{3},$$
$$\frac{f(x+3h)-f(x+h)}{2h} = \frac{f'(x+h)+f'(x+2h)+f'(x+3h)}{3},$$

отже $\dfrac{f'(x+3h)-f'(x)}{3} = \dfrac{f(x+3h)-f(x+2h)-f(x+h)+f(x)}{2h}$. Права частина останньої рівності належить $C^{(1)}\big((0,+\infty)\big)$ як функція від h, тому $f' \in C^{(1)}\big((x,+\infty)\big)$ при кожному $x \in \mathbb{R}$, звідки $f \in C^{(2)}(\mathbb{R})$. За індукцією дістаємо, що $f \in C^{(k)}(\mathbb{R})$, $k \geq 1$. Розкладемо $f(x+2h)$ за формулою Тейлора із залишком у формі Пеано з точністю до $o(h^3)$, а $f'(x+h)$ та $f'(x+2h)$ — з точністю до $o(h^2)$, $h \to 0+$. Дістанемо

$$\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h} = f'(x)+f''(x)h+\frac{2}{3}f'''(x)h^2+o(h^2) =$$
$$= \frac{f'(x)+f'(x+h)+f'(x+2h)}{3} = f'(x)+f''(x)h+\frac{5}{6}f'''(x)h^2+o(h^2),\ h \to 0+.$$

Звідси $f'''(x) = 0$ при кожному $x \in \mathbb{R}$. Тому f — многочлен степеня не вище 2. Перевірка показує, що всі такі многочлени задовольняють умову.

II спосіб. (С.В. Слободянюк) При довільних $a < b$ маємо

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a} + \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}{b-a},\ \text{тобто}$$

$$\frac{f'(a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'(b)}{3} = \frac{f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)+f'(b)}{6} + \frac{f'(a)+f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{6}.$$

Звідси $f'(a)+f'(b)=f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)$. Таким чином, при $x=\frac{a+b}{2}$ та $h=\frac{b-a}{2}$ маємо

$$f'(x-h)+f'(x+h)=f'\left(x-\tfrac{h}{2}\right)+f'\left(x+\tfrac{h}{2}\right).$$

Індукцією за $n\ge 1$ дістаємо, що

$$f'(x-h)+f'(x+h)=f'\left(x-\tfrac{h}{2^n}\right)+f'\left(x+\tfrac{h}{2^n}\right)\to 2f'(x),\ n\to\infty,$$

а отже $f'(a)+f'(b)=2f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $a<b$.

Звідси випливає, що при довільних $a<b$ функція f' є лінійною на множині

$$\left\{a+\tfrac{k}{2^n}(b-a)\,|\,n\in\mathbb{N},0\le k\le 2^n\right\},$$

а внаслідок неперервності і на відрізку $[a,b]$. Тому функція f' є лінійною на $\mathbb{R}$ та f — многочлен степеня не вище 2. Залишається виконати перевірку.

Відповідь: $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $x\in\mathbb{R}$, де $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ довільні.

6. Якщо у множині принаймні 9 матриць, то деякі матриці мають однаковий перший рядок, тому їхня сума має нульовий перший рядок (тут і далі всі рівності у сенсі $\mathbb{Z}_2$) та є виродженою. Покажемо, що умову задовольняє множина

$$\mathcal{M}=\left\{T_{a,b,c}=\left(\begin{smallmatrix}a&b&c\\b&c&a+b\\c&a+b&b+c\end{smallmatrix}\right)\ \Big|\ a,b,c\in\mathbb{Z}_2\right\},$$

яка містить 8 матриць. Неважко перевірити, що $\det T_{a,b,c}=(a+1)(b+1)(c+1)+1$, а отже $\det T_{a,b,c}=1$ при всіх $(a,b,c)\in\mathbb{Z}_2^3\setminus\{(0,0,0)\}$. Звідси випливає, що при довільних $(a',b',c')\ne(a'',b'',c'')$ маємо $\det(T_{a',b',c'}+T_{a'',b'',c''})=\det T_{a'+a'',b'+b'',c'+c''}\ne 0$.

Відповідь: 8 матриць.

Зауваження. Цілком аналогічно перевіряється, що умову задовольняють множини

$$\left\{U_{a,b,c}=\left(\begin{smallmatrix}a&c&b+c\\c&b&a+b+c\\b+c&a+b+c&c\end{smallmatrix}\right)\ \Big|\ a,b,c\in\mathbb{Z}_2\right\}\text{ та }\left\{V_{a,b,c}=\left(\begin{smallmatrix}a&b&c\\a+b&c&a\\c&a+c&b\end{smallmatrix}\right)\ \Big|\ a,b,c\in\mathbb{Z}_2\right\}.$$

Завдання для 3–4 курсів

2. *I спосіб.* Нехай $0<a_1<a_2<\ldots$ та $\mathsf{P}(\xi=a_n)=\frac{1}{2^n}$, $n\ge 1$. При $x\in(a_{n-1},a_n]$, $n\ge 2$, маємо $x(1-F(x))=x\,\mathsf{P}(\xi\ge x)\le a_n\mathsf{P}(\xi>a_{n-1})=\frac{a_n}{2^{n-1}}$. Отже, якщо $\frac{a_n}{2^n}\to 0$, $n\to\infty$, то $x(1-F(x))\to 0$, $x\to+\infty$. При цьому $\mathsf{M}\xi=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$ не обов'язково є скінченним. Наприклад, якщо $a_1=1$ та $a_n=\frac{2^n}{n}$, $n\ge 2$, то послідовність $\{a_n,\ n\ge 1\}$ зростає, $\frac{a_n}{2^n}\to 0$, $n\to\infty$, та $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=+\infty$.

II спосіб. Нехай ξ — випадкова величина із функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}1-\frac{e}{x\ln x}, & x>e,\\ 0, & x\le e.\end{cases}$$

При $x > e$ маємо $x(1-F(x)) = \frac{e}{\ln x} \to 0,\ x \to +\infty$, проте

$$\mathsf{M}\xi = \int\limits_e^\infty xF'(x)dx = e\int\limits_e^\infty \frac{x(\ln x+1)dx}{x^2\ln^2 x} \ge e\int\limits_e^\infty \frac{dx}{x\ln x} = +\infty.$$

Відповідь: ні, не обов'язково.

3. а) Зафіксуємо довільні $\varepsilon > 0$ та $N \in \mathbb{N}$. Розглянемо множини

$$A_k = \{x \in X : |f_k(x)| \ge \varepsilon\},\ k \ge 1.$$

Оберемо $K \in \mathbb{N}$ так, що $\mu_n(A_k) < \frac{1}{2^N}$, $k \ge K$, при кожному $1 \le n \le N$. Тоді

$$\mu(A_k) \le \sum_{n=1}^N 2^{-n}\mu_n(A_k) + \sum_{n=N+1}^\infty 2^{-n}\mu_n(X) < \sum_{n=1}^N 2^{-n}\cdot\frac{1}{2^N} + \sum_{n=N+1}^\infty 2^{-n} < \frac{2}{2^N},\ k \ge K,$$

отже $f_k \xrightarrow{\mu} 0$, $k \to \infty$.

б) Нехай $X = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$, λ — міра Лебега на $[0,1]$. При $n \ge 1$ покладемо $\mu_n(A) = 2^n\lambda\big(A \cap [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]\big)$, $A \in \mathcal{F}$. Очевидно, що тоді $\mu = \lambda$. Розглянемо функції $f_k(x) = 2^n\,\mathrm{I}_{[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}]}(x)$, $k \ge 1$. Оскільки $\int\limits_{[0,1]} f_k\,d\mu_n = 0$, $k \ne n$, то $\int\limits_{[0,1]} f_k\,d\mu_n \to 0$, $k \to \infty$. Також $\int\limits_{[0,1]} f_k\,d\mu = 1 \not\to 0$, $k \to \infty$.

Відповідь: а) так; б) ні.

4. Функція f_n парна та 2π-періодична, тому достатньо розглянути $t \in [0,\pi]$.

При $\frac{\pi}{n} \le t \le \pi$ маємо

$$f_n(t) = \frac{\sin^2\left(\frac{nt}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2n\sin^2\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4n}\right)} + \frac{\sin^2\left(\frac{nt}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2n\sin^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4n}\right)} = \frac{\sin^2\left(\frac{nt}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2n\sin^2\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4n}\right)} + \frac{\cos^2\left(\frac{nt}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2n\sin^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4n}\right)} \le$$
$$\le \frac{1}{2n\sin^2\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4n}\right)} \le \frac{1}{2n\sin^2\frac{\pi}{4n}} = f_n(0).$$

Залишається довести, що $f_n(t) \le f_n(0)$ при $0 \le t \le \frac{\pi}{n}$. Для цього достатньо показати, що $f_n'(t) \le 0$ при $t \in [0, \frac{\pi}{n}]$. Використаємо зображення $F_n(t) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{n}\cos kt,\ t \in \mathbb{R}$, звідки

$$f_n(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{n}\Big(\cos k\left(t-\tfrac{\pi}{2n}\right) + \cos k\left(t+\tfrac{\pi}{2n}\right)\Big) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2(n-k)}{n}\cos kt\cos\tfrac{k\pi}{2n}.$$

Таким чином,

$$f_n'(t) = -\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k(n-k)}{n}\sin kt\cos\tfrac{k\pi}{2n} \le 0,\ t \in [0, \tfrac{\pi}{n}],$$

бо $\sin kt \ge 0$ та $\cos\frac{k\pi}{2n} \ge 0$ при всіх $k = 1, \ldots, n-1$ та $t \in [0, \frac{\pi}{n}]$.

5. Будемо записувати числа у двійковій системі числення. Нехай $\rho(a,b)$ — результат порозрядного додавання чисел a та b за модулем 2, тобто при $a=\sum\limits_{i\ge 0}\alpha_i 2^i$, $b=\sum\limits_{i\ge 0}\beta_i 2^i$ (тут $\alpha_i,\beta_i\in\{0,1\}$, $i\ge 0$, та суми містять скінченну кількість ненульових доданків) покладемо $\rho(a,b)=\sum\limits_{i\ge 0} d(\alpha_i,\beta_i)2^i$, де $d(\alpha,\beta)$ — остача від ділення $\alpha+\beta$ на 2. Тоді умова $\rho(a,\rho(b,c))=\rho(\rho(a,b),c)$ виконується, бо порозрядне додавання за модулем 2 є асоціативним. Очевидно, що $\rho(a,b)\ge 0$, $\rho(a,b)=0$ тоді й лише тоді, коли $a=b$, та $\rho(a,b)=\rho(b,a)$. Залишається перевірити, що ρ задовольняє нерівність трикутника. Справді, оскільки d є дискретною метрикою на $\{0,1\}$, то $d(\alpha,\beta)\le d(\alpha,\gamma)+d(\gamma,\beta)$ при всіх $\alpha,\beta,\gamma\in\{0,1\}$. Тому при $a=\sum\limits_{i\ge 0}\alpha_i 2^i$, $b=\sum\limits_{i\ge 0}\beta_i 2^i$ та $c=\sum\limits_{i\ge 0}\gamma_i 2^i\in\mathbb{Z}_+$ маємо

$$\rho(a,b)=\sum_{i\ge 0} d(\alpha_i,\beta_i)2^i\le\sum_{i\ge 0} d(\alpha_i,\gamma_i)2^i+\sum_{i\ge 0} d(\gamma_i,\beta_i)2^i=\rho(a,c)+\rho(c,b).$$

Відповідь: так, існує.