

# КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Механіко-математичний факультет  
кафедра теорії ймовірностей статистики та актуарної математики



«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Заступник декана/директора  
навчальної роботи  
факультет

Харитонов О.М.

« 4 » серпня 20 21 року

## РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Узагальнені процеси дробового броунівського руху. Статистика випадкових процесів. Теорія Марковських процесів.  
Науковий семінар з теорії ймовірностей та математичної статистики  
для студентів

галузь знань	11 математика та статистика
спеціальність	111 математика
освітня програма	Математика
вид дисципліни	вибіркова

Форма навчання	денна
Навчальний рік	20 21 / 20 22
Семестр	3 магістратури
Кількість кредитів ECTS	7
Мова викладання, навчання та оцінювання	українська
Форма заключного контролю	залік

**Викладачі:** Мішура Юлія Степанівна, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедрою теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики.

Пролонговано: на 20 \_\_\_ / 20 \_\_\_ н.р. \_\_\_\_\_ ( \_\_\_\_\_ ) « \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_ р.  
на 20 \_\_\_ / 20 \_\_\_ н.р. \_\_\_\_\_ ( \_\_\_\_\_ ) « \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_ р.

КИЇВ - 2021

Розробники: Мішура Юлія Степанівна, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедрою теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики.

ЗАТВЕРДЖЕНО



Зав. кафедри \_\_\_\_\_  
(Мішура Ю.С.)

Протокол № 11 від «02» 03 2021 року

Схвалено науково - методичною комісією механіко-математичного факультету

Протокол від «31» 08 2021 року № 1

Голова науково-методичної комісії О/О доктор фіз.-мат. наук, професор Олійник А.С.

«31» 08 2021 року

## ВСТУП

Дисципліна «Узагальнені процеси дробового броунівського руху. Статистика випадкових процесів. Теорія Марковських процесів. Науковий семінар з теорії ймовірностей та математичної статистики» є складовою освітньої програми підготовки фахівців за освітнім рівнем «магістр» у галузі знань 11 математика та статистика зі *спеціальності* 111 математика освітньої програми «математика».

Дана дисципліна є вибірковою.

Викладається у 3 семестрі магістратури в обсязі 210 год. (7 кредити ECTS<sup>1</sup>), в тому числі 42 годин лекцій, 14 годин семінарських, 4 години консультацій та 150 години самостійної роботи. У курсі передбачено 1 *змістовний модуль* та 1 *модульна контрольна робота*. Завершується дисципліна – **заліком**.

- 1. Мета дисципліни** - оволодіння сучасними методами, теоретичними положеннями та основними застосуваннями сучасної теорії узагальнених процесів дробового броунівського руху, статистики випадкових процесів, теорії Марковських процесів, застосування цих методів до розв'язання типових задач.
- 2. Попередні вимоги до опанування або вибору навчальної дисципліни:**  
Відсутні

### **3. Анотація навчальної дисципліни:**

Дисципліна «Узагальнені процеси дробового броунівського руху. Статистика випадкових процесів. Теорія Марковських процесів. Науковий семінар з теорії ймовірностей та математичної статистики» включає в себе основні поняття і методи теорії узагальнених процесів дробового броунівського руху, статистики випадкових процесів, теорії Марковських процесів. Зокрема, означення та основні властивості дробових інтегралів, похідних та інших елементів дробового аналізу, означення та основні властивості дробового броунівського руху, інтегрування відносно гауссових процесів і узагальнених дробових процесів, стохастичні диференціальні рівняння, що включають дробовий броунівський рух, статистичне оцінювання параметрів в моделях лінійної регресії, статистичне оцінювання параметрів в моделях зі стандартним вінерівським процесом, статистичне оцінювання параметрів в моделях з дробовим броунівським рухом, означення, основні властивості і

---

<sup>1</sup> кредитів ECTS – кредит кратний 30 годинам.

прикладі марковських процесів, елементи аналітичної теорії марковських процесів, означення та основні властивості марковських ланцюгів.

4. **Завдання (навчальні цілі):** формування здатності розв'язувати складні спеціалізовані математичні та статистичні задачі, що характеризується комплексністю і невизначеністю умов і передбачає застосування теоретико-ймовірнісних і статистичних методів; набуття знань, умінь та навичок (компетентностей) на рівні новітніх досягнень у математиці та статистиці, відповідно до освітнього рівня «Магістр». Зокрема, професійне оволодіння компетентностями:

- 1) Здатність учитися, здобувати нові знання, уміння, у тому числі в галузях, відмінних від математики (ЗК-1);
- 2) Здатність використовувати у професійній діяльності знання з галузей математичних, природничих, соціально-гуманітарних та економічних наук (ЗК-2);
- 3) Здатність вирішувати проблеми у професійній діяльності на основі абстрактного мислення, аналізу, синтезу та прогнозу (ЗК-3);
- 4) Здатність до пошуку, оброблення й аналізу інформації з різних джерел, необхідної для розв'язування наукових і професійних завдань (ЗК-4);
- 5) Здатність генерувати нові ідеї (ЗК-5);
- 6) Здатність спілкуватися державною мовою і усно, і письмово (ЗК-8);
- 7) Здатність спілкуватися іноземною мовою (ЗК-9);
- 8) Здатність грамотно будувати комунікацію, виходячи з мети і ситуації спілкування (ЗК-10);
- 9) Здатність критично оцінювати та переосмислювати власний і чужий досвід, аналізувати свою професійну й соціальну діяльність (ЗК-11);
- 10) Знання на рівні новітніх досягнень, необхідні для дослідницької та/або інноваційної діяльності у сфері математики та її практичних застосувань (ФК-1);
- 11) Спроможність розуміти проблеми та виділяти їхні суттєві риси (ФК-4);
- 12) Спроможність розробляти математичну модель ситуації з реального світу та переносити математичні знання у нематематичні контексти (ФК-5);
- 13) Здатність доводити знання та власні висновки до фахівців та нефахівців (ФК-6);
- 14) Здатність до розвитку нових та удосконалення існуючих математичних методів аналізу, моделювання, прогнозування, розв'язування нових проблем у нових галузях знань (ФК-8).
- 15) Здатність до самоосвіти та підвищення кваліфікації на основі інноваційних підходів у сфері математики (ФК-10).

5. Результат навчання за дисципліною.

Табл.1

Результат навчання (1. знати; 2. вміти; 3. комунікація; 4. автономність та відповідальність)		Форми (та/або методи і технології) викладання і навчання	Методи оцінювання та пороговий критерій оцінювання за необхідності	Відсоток у підсум- ковій оцінці з дисциплі- ни
Код	Результат навчання			
РН- 1.1	Знати: основні властивості дробового броунівського руху; знати основні властивості інтегралів відносно дробового броунівського руху, як функцій верхньої межі інтегрування;	Лекції, семінарські заняття,  самостійне опрацювання	перевірка індивідуальних завдань, опитування під час семінарських занять, контрольна робота	10%
РН-1.2	Знати: основні методи оцінювання параметрів зносу та дифузії в моделях лінійної регресії та їхні асимптотичні властивості;	Лекції, семінарські заняття,  самостійне опрацювання	перевірка індивідуальних завдань, опитування під час семінарських занять, самостійна аудиторна робота	10%
РН- 1.3	Знати: основні методи оцінювання параметрів зносу та дифузії в моделях зі стандартним вінерівським процесом та їхні асимптотичні властивості.	Лекції, семінарські заняття,  самостійне опрацювання	перевірка індивідуальних завдань, опитування під час семінарських занять, контрольна робота	10%
РН- 1.4	Знати: основні методи оцінювання параметрів зносу та дифузії в моделях з дробовим броунівським рухом та їхні асимптотичні властивості.	Лекції, семінарські заняття,  самостійне опрацювання	перевірка індивідуальних завдань, опитування під час семінарських занять, контрольна робота	10%
РН- 1.5	Знати: основні властивості і приклади марковських процесів	Лекції, семінарські заняття,  самостійне опрацювання	перевірка індивідуальних завдань, опитування під час семінарських занять, контрольна робота	10%
РН- 2.1	Вміти обчислювати дробові інтеграли і похідні; обчислювати основні числові характеристики дробового броунівського руху, знаходити інтеграли відносно	Лекції, семінарські заняття,  самостійне опрацювання	перевірка індивідуальних завдань, опитування під час семінарських	10%

	дробового броунівського руху		занять, контрольна робота	
РН- 2.2	Вміти розв'язувати прості рівняння з дробовим броунівським рухом і досліджувати властивості розв'язків складніших аналогічних рівнянь; будувати і досліджувати оцінки параметрів зносу та дифузії в будувати і досліджувати оцінки параметрів зносу та дифузії в моделях з дробовим броунівським рухом.	Лекції, семінарські заняття,  самостійне опрацювання	перевірка індивідуальних завдань, опитування під час семінарських занять, контрольна робота	15%
РН- 2.3	Вміти перевірити марковську властивість для основних класів випадкових процесів; обчислювати перехідні ймовірності, резольвенти та генератори для основних класів марковських та дифузійних процесів; будувати матриці перехідних ймовірностей і оперувати з ними, а також обчислювати за ними основні числові характеристики марковських процесів.	Лекції, семінарські заняття,  самостійне опрацювання	перевірка індивідуальних завдань, опитування під час семінарських занять, контрольна робота	15%
РН- 3.1	Здатність грамотно будувати комунікацію, виходячи з мети і ситуації спілкування	Лекції, семінарські заняття,	опитування під час семінарських занять	2.5%
РН- 3.2	Вироблення навиків командної роботи	Лекції, семінарські заняття,	опитування під час семінарських занять	2.5%
РН4.1	Самостійно шукати та критично опрацьовувати літературу із відповідних досліджень, вільно володіти методами обробки, аналізу та синтезу наукової інформації	Лекції, семінарські заняття,	опитування під час семінарських занять	2.5%
РН4.2	Відповідально ставитися до виконуваних робіт, нести відповідальність за їх якість	Лекції, семінарські заняття,	опитування під час семінарських занять	2.5%

## 6. Співвідношення результатів навчання дисципліни із програмними результатами навчання

(необов'язково для вибіркових дисциплін, які не входять до блоків спеціалізації)

Результати навчання дисципліни (код)	РН 1.1	РН 1.2	РН 1.3	РН 1.4	РН 1.5	РН 2.1	РН 2.2	РН 2.3	РН 3.1	РН 3.2	РН 4.1	РН 4.2
<b>Програмні результати навчання (назва)</b>												
<b>знання</b>												
<b>ПРН-3-1</b> - Знати та розуміти фундаментальні і прикладні аспекти наук у сфері математики;	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+
<b>ПРН-3-2</b> - Відтворювати знання фундаментальних розділів математики в обсязі, необхідному для володіння математичним апаратом відповідної галузі знань і використання математичних методів у обраній професії	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+
<b>ПРН-3-3</b> - Володіти основами математичних дисциплін і теорій, зокрема які вивчають моделі природничих і соціальних процесів	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+
<b>ПРН-3-4</b> - Володіти математичними методами аналізу, прогнозування та оцінки параметрів моделей, математичними способами інтерпретації числових даних та принципами функціонування природничих процесів	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+
<b>уміння</b>												
<b>ПРН-У-1</b> - Уміти використовувати фундаментальні математичні закономірності у професійній діяльності	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+

<b>ПРН-У-2</b> - Читати і розуміти фундаментальні розділи математичної літератури та демонструвати майстерність їх відтворення в аргументованій усній та/або письмовій доповіді	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+
<b>ПРН-У-3</b> - Доносити професійні знання, власні обґрунтування і висновки до фахівців і широкого загалу;	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+
<b>ПРН-У-8</b> - Бути наполегливим у досягненні мети під час вирішення математичної проблеми;	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+
<b>ПРН-У-10</b> - Усно й письмово спілкуватися рідною та іноземною мовами в науковій, виробничій та соціально-суспільній сферах діяльності із професійних питань; читати спеціальну літературу; знаходити, аналізувати та використовувати інформацію з різних довідкових джерел	+	+	+	+	+	+	+	+	+			
<b>ПРН-У-11</b> - Використовувати раціональні способи пошуку та використання науково-технічної інформації, включаючи засоби електронних інформаційних мереж; застосовувати інформаційні ресурси, у тому числі електронні, для пошуку відповідних математичних моделей	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
<b>ПРН-У-12</b> - Дотримуватися норм	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+



етичної поведінки стосовно інших людей, адаптуватися та комунікувати												
----------------------------------------------------------------------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

## 7. Схема формування оцінки

### 7.1. Форми оцінювання студентів:

#### - оцінювання впродовж навчального періоду:

1. *Активна робота на лекції, усні відповіді:* РН1.1,РН1.2,РН1.3, РН1.4, РН1.5, РН2.1, РН2.2, РН2.3, РН3.1, РН3.2, РН4.1, РН4.2 – 18 балів/11 балів;
  2. *Виконання завдань, винесених на самостійну роботу:* РН2.1, РН2.2, РН2.3 – 21 балів/12 балів;
  3. *Контрольна робота 1:* РН1.1, РН1.2, РН2.1 – 21 балів/12 балів;
- Разом має бути 60/35*

#### підсумкове оцінювання (у формі іспиту/заліку): форма заліку – письмово-усна.

Білет заліку містить 3 теоретичні питання - 0-5 балів за кожне, 2 задачі –0-10 балів за кожну. Усна відповідь – 0-5 балів

**Всього** – максимум 40 балів

- *результати навчання, які будуть оцінюватись:* РН1.1, РН1.2, РН1.3, РН1.4, РН1.5, РН2.1, РН2.2, РН2.3.
- **умови допуску до підсумкового заліку:** умовою допуску до заліку є отримання студентом сумарно не менше, аніж *критично-розрахунковий мінімум 35 балів* за семестр. Студенти, які протягом семестру набрали сумарно меншу кількість балів, ніж критично-розрахунковий мінімум 35 балів, для одержання допуску до іспиту обов'язково повинні написати на необхідну порогову кількість балів додаткову контрольну роботу за матеріалом відповідного семестру та доскладають домашні завдання для підвищення балів за виконання самостійної роботи.

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та прездачі форм контролю здійснюються у відповідності до „Положення про організацію освітнього процесу в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка” (2018), <http://www.univ.kiev.ua/pdfs/official/Organization-of-the-educational-process.pdf>.

### 7.2. Організація оцінювання (обов'язково зазначається порядок організації передбачених робочою навчальною програмою форм оцінювання із зазначенням орієнтованого графіку оцінювання):

#### Оцінювання за формами контролю:

	ЗМІ	
	Min. – балів	Max. – балів
Активність студента на заняттях і виконання ним самостійної роботи	23	39
Модульна контрольна робота 1	12	21

*Орієнтований графік оцінювання:*

	<i>Орієнтовний період для здійснення відповідної форма оцінювання</i>
Модульна контрольна робота 1	листопад
Активність студента на заняттях і виконання ним самостійної роботи	початок грудня
Добір балів/додаткова контрольна робота/доскладання домашніх завдань	грудень
залік	перша половина грудня

*Розрахунок балів, які студент отримує при успішній здачі заліку:*

	Змістовий модуль 1	іспит / залік	Підсумкова оцінка
<i>Мінімум</i>	35	25	60
<b>Максимум</b>	<b>60</b>	<b>40</b>	<b>100</b>

### 7.3. Шкала відповідності оцінок

Оцінка (за національною шкалою) / National grade	Рівень досягнень, % / Marks, %
<b>Зараховано / Passed</b>	60-100%
<b>Не зараховано / Fail</b>	0-59%

### 8. Структура навчальної дисципліни. Тематичний план лекцій та самостійної роботи

№ теми	Назва теми	Кількість годин			
		Лекції	семінарські	самост. робота	Модульні КР
<i>Змістовий модуль</i>					
<i>Теорія ймовірностей та математична статистика</i>					
1	Означення та основні властивості дробових інтегралів, похідних та інших елементів дробового аналізу.	4	2	15	2
2	Означення та основні властивості дробового броунівського руху.	4		15	
3	Інтегрування відносно гауссових процесів і зокрема узагальнених дробових процесів.	4	2	15	

4	Стохастичні диференціальні рівняння, що включають дробовий броунівський рух.	4		15	
5	Статистичне оцінювання параметрів в моделях лінійної регресії.	4		15	
6	Статистичне оцінювання параметрів в моделях зі стандартним вінерівським процесом.	4	2	15	
7	Статистичне оцінювання параметрів в моделях з дробовим броунівським рухом.	4	2	15	
8	Означення, основні властивості і приклади марковських процесів.	4	2	15	
9	Елементи аналітичної теорії марковських процесів.	6	2	15	
10	Означення та основні властивості марковських ланцюгів.	4	2	15	
	<b>ВСЬОГО</b>	<b>42</b>	<b>14</b>	<b>150</b>	

Загальний обсяг **210 год.**, зокрема:

Лекції – **42 год.**



Семінарські заняття – **14 год.**

Самостійна робота – **150 год.**

Консультації – **4 год.**

## 9. Рекомендовані джерела

*Основна (Базова):*

1. Oksana Banna, Yuliya Mishura, Kostiantyn Ralchenko, Sergiy Shklyar "*Fractional Brownian Motion. Approximations and Projections*". Wiley-ISTE, 288 p. – 2019, 
2. K. Kubilius, Yu. Mishura, K. Ralchenko "*Parameter Estimation in Fractional Diffusion Models*". Bocconi & Springer Series, 380 p. - 2017 
3. О.Л. Банна, Ю.С. Мішура "*Дробовий броунівський рух у взаємодії з класами споріднених випадкових процесів*". РПЦ "Київський університет", 170 p. – 2015.
4. И.И. Гихман, А.В. Скороход. Теория случайных процессов, Том 2, М.: Наука, 1973

*Додаткова:*

1. Yu. Mishura, M. Zili *"Stochastic Analysis of Mixed Fractional Gaussian Processes"*.  
ISTE Press - Elsevier, 210 p. - 2018 
2. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика. К. : ВПЦ «Київський університет», 2007.
3. Ю. С. Мішура, К. В. Ральченко, Л. М. Сахно, Г.М. Шевченко *"Випадкові процеси. Теорія. Статистика. Застосування"*. Видавничо-редакційний центр Київського національного університету імені Тараса Шевченка, - 2019
4. Yu. Mishura, G. Shevchenko *"Theory and Statistical Applications of Stochastic Processes"*. Wiley-ISTE, 400 p. - 2017