

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
кафедра інтегральних та диференціальних рівнянь

«ЗАТВЕРДЖУЮ»  
Заступник декана  
з навчальної роботи  
Харитонов О.М..  
«серпень» 2021 року

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Варіаційне числення та методи оптимізації  
для студентів

галузь знань	11 «Математика та статистика»
спеціальність	111 «Математика»
освітній рівень	перший (бакалавр)
освітня програма	«Математика»
вид дисципліни	обов'язкова

Форма навчання	денна
Навчальний рік	2021/2022
Семестр	7
Кількість кредитів ECTS	3
Мова викладання, навчання та оцінювання	українська
Форма заключного контролю	іспит

Викладачі: Капустян Олексій Володимирович, д.ф.м.н., професор, професор кафедри  
інтегральних та диференціальних рівнянь

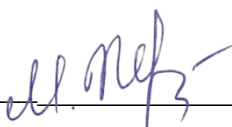
Пролонговано: на 20 /20 н.р. ( ) « » 20 р.  
на 20 /20 н.р. ( ) « » 20 р.

КИЇВ – 2021

Розробник: Капустян Олексій Володимирович, д.ф.м.н., професор, професор кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь

ЗАТВЕРДЖЕНО

Зав. кафедри інтегральних та  
диференціальних рівнянь



Перестюк М.О.

Протокол №1 від 30 серпня 2021 р.

Схвалено науково-методичною комісією механіко-математичного факультету

Протокол від “31” серпня 2021 року № 1

Голова науково-методичної комісії  професор, д.ф.-м.н. Олійник А.С.

1. **Мета дисципліни** – ознайомлення з основними поняттями та положеннями теорії екстремальних задач, проведення їх класифікації, опанування основними методами розв'язання таких задач та застосування цих методів до характерних прикладів задач скінченновимірної оптимізації, варіаційного числення та оптимального керування.

2. **Попередні вимоги до опанування або вибору навчальної дисципліни:**

1. *Знати:* основні поняття, факти і теореми математичного аналізу, лінійної алгебри, теорії диференціальних рівнянь.

2. *Вміти:* активно використовувати та творчо застосовувати зазначені вище знання в процесі опрацювання матеріалу курсу «Варіаційне числення та методи оптимізації», а також при аналізі екстремальних скінченновимірних задач, задач класичного варіаційного числення та задач оптимального керування, що виникають в прикладних задачах.

3. *Володіти елементарними навичками:* дослідження екстремумів функцій однієї змінної, розв'язання алгебраїчних систем, інтегрування основних типів диференціальних рівнянь та лінійних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

**3. Анотація навчальної дисципліни:**

Навчальна дисципліна «Варіаційне числення та методи оптимізації» є складовою освітньої програми підготовки фахівців за освітнім рівнем «бакалавр» галузі знань 11 Математика та статистика зі спеціальності 111 Математика освітньої програми «Математика». Дана дисципліна є обов'язковою. Дисципліна «Варіаційне числення та методи оптимізації» вивчає теорію задач на пошук екстремуму в скінченновимірних та нескінченновимірних просторах та охоплює наступне коло питань: екстремуми функцій багатьох змінних з обмеженнями типу рівностей та нерівностей, елементи опуклого аналізу, елементи диференціального числення в нормованих просторах, задачі класичного варіаційного числення, задачі оптимального керування, а також приклади застосування цієї теорії в прикладних задачах. Викладається у 7 семестрі 4 курсу в обсязі 90 год. (3 кредити ECTS<sup>1</sup>) зокрема: лекції – 26 год., практичні – 12 год., консультацій – 2 год., самостійна робота – 50 год. У курсі передбачено 2 змістових модулі та 2 модульні контрольні роботи. Завершується дисципліна іспитом.

**Завдання (навчальні цілі):** формування здатності розв'язувати складні задачі та практичні проблеми у математиці або у процесі навчання, що передбачає застосування теорій та методів математики, статистики й комп'ютерних технологій і характеризується комплексністю та невизначеністю умов; набуття знань, умінь та навичок (компетентностей) на рівні новітніх досягнень у математиці, відповідно до освітнього рівня «Бакалавр». Зокрема, професійне оволодіння компетентностями:

- 1) Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- 2) Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;
- 3) Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності;
- 4) Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями;
- 5) Здатність приймати обґрунтовані рішення;
- 6) Здатність спілкуватися з представниками інших професійних груп різного рівня (з експертами з інших галузей знань);
- 7) Здатність працювати автономно;

---

<sup>1</sup> кредитів ECTS – кредит кратний 30 годинам.

- 8) Здатність зберігати та примножувати моральні, культурні, наукові цінності і досягнення суспільства на основі розуміння історії та закономірностей розвитку предметної області, її місця у загальній системі знань про природу і суспільство та у розвитку суспільства, техніки і технологій, використовувати різні види та форми рухової активності для активного відпочинку та ведення здорового способу життя;
- 9) Здатність використовувати у професійній діяльності базові знання з галузей математичних, природничих, соціально-гуманітарних та економічних наук;
- 10) Здатність використовувати стандартні прийоми та методи математичних досліджень, проявляти творчий підхід, ініціативу;
- 11) Здатність формулювати проблеми математично та в символічній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання;
- 12) Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі;
- 13) Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок;
- 14) Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганих;
- 15) Здатність до кількісного мислення;
- 16) Здатність розробляти і досліджувати математичні моделі явищ, процесів та систем;
- 17) Здатність застосовувати чисельні методи для дослідження математичних моделей;
- 18) Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів;
- 19) Здатність використовувати обчислювальні інструменти для чисельних і символічних розрахунків;
- 20) Здатність виражати терміни специфічної предметної області мовою математики;
- 21) Здатність розуміти проблеми та виділяти їхні суттєві риси;
- 22) Здатність формулювати складні задачі оптимізації та прийняття рішень й інтерпретувати їхні розв'язки в оригінальному контексті цих задач;
- 23) Здатність отримувати якісну інформацію на основі кількісних даних;
- 24) Здатність розробляти експериментальні та спостережні дослідження й аналізувати дані, отримані на їх основі;
- 25) Здатність пояснювати математичними термінами результати, отримані під час розрахунків.

## 5. Результати навчання за дисципліною:

Результат навчання (РН) (1, знати; 2, вміти; 3, комунікація; 4, автономність та відповідальність)		Форми (та/або методи і технології) викладання і навчання	Методи оцінювання та пороговий критерій оцінювання (за необхідності)	Відсоток у підсумковій оцінці з дисципліни
Код	Результат навчання			
РН 1.1	Необхідні та достатні умови екстремуму в скінченновимірних задачах без обмежень та з обмеженнями типу рівностей, теорема Куна-Такера	лекція	активна робота на лекціях, модульна контрольна робота, іспит	10%
РН 1.2	Необхідні та достатні умови екстремуму функціоналів в нормованих просторах			10%
РН 1.3	Необхідні та достатні умови екстремуму в задачах класичного варіаційного числення			10%

PH 1.4	Принцип максимуму Понтрягіна та метод динамічного програмування Беллмана в задачах оптимального керування			20%
PH 2.1	розв'язувати екстремальні скінченновимірні задачі без обмежень та з обмеженнями типу рівностей, знаходити екстремуму в опуклих задачах	лекція, практичне заняття, самостійна робота	розв'язання задач на практичних заняттях, виконання завдань самостійної роботи, модульна контрольна робота, іспит	10%
PH 2.2	знаходити екстремуми функціоналів в нормованих просторах			10%
PH 2.3	знаходити сильні та слабкі екстремуми в задачах Лагранжа, Больца та ізопериметричній задачі класичного варіаційного числення			10%
PH 2.4	Розв'язувати основні типи задач оптимального керування			10%
PH 3.1	Здатність обґрунтовувати власний погляд на задачу та формулювати робочі гіпотези, спілкуватися з колегами з питань застосування математичних методів та теорій	лекція, практичне заняття, самостійна робота	активна робота на лекціях, практичних заняттях	5%
PH 3.2	Вироблення навиків командної роботи			5%

## 6. Співвідношення результатів навчання дисципліни із програмними результатами навчання

Результати навчання дисципліни	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р
	Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н
<b>Програмні результати навчання</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>3</b>
	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>1</b>	<b>2</b>
<i>(з опису освітньої програми)</i>										
<b>PH-1</b> - Знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
<b>PH-3</b> - Знати принципи modus ponens (правило виведення логічних висловлювань) та modus tollens (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
<b>PH-4</b> - Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
<b>PH-6</b> - Знати методи математичного моделювання природничих та/або соціальних процесів	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
<b>PH-10</b> - Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями										
<b>РН-11</b> - Розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей	+	+	+	+	+	+	+	+		
<b>РН-16</b> - Знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем	+	+	+	+	+	+	+	+		
<b>РН-21</b> - Розв'язувати типові задачі математичного аналізу, алгебри, диференціальних та інтегральних рівнянь, оптимізації за допомогою чисельних методів	+	+	+	+	+	+	+	+		
<b>РН-24</b> - Зберігати та примножувати моральні, культурні, наукові цінності і досягнення суспільства на основі розуміння історії та закономірностей розвитку предметної області, її місця у загальній системі знань про природу і суспільство та у розвитку суспільства, техніки і технологій									+	+
<b>РН-26</b> - Бути наполегливим у досягненні мети під час вирішення математичної проблеми	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

## 7. Схема формування оцінки.

### 7.1. Форми оцінювання студентів:

#### - оцінювання впродовж навчального періоду:

1. Активна робота на лекціях: РН1.1-РН1.4, РН3.1, РН3.2 – 5 балів/3 бали;
  2. Виконання завдань для самостійної роботи: РН2.1 - РН2.4 – 15 балів/9 балів;
  3. Контрольна робота 1: РН1.1, РН1.2, РН2.1, РН2.2 – 15 балів/9 балів;
  4. Контрольна робота 2: РН1.3, РН1.4, РН2.3, РН2.4 – 15 балів/9 балів;
  6. Розв'язання задач на практичних заняттях: РН2.1-РН2.4, РН3.1,РН3.2–10 балів/5 балів;
- Разом: 60/35

#### - підсумкове оцінювання: іспит.

- максимальна кількість балів, які можуть бути отримані: 40 балів;
- результати навчання, які будуть оцінюватись: РН1.1-РН1.4, РН2.1-РН2.4
- форма проведення і види завдань: письмова робота.

### 7.2. Організація оцінювання:

Активна робота на лекціях передбачає усні відповіді на запитання лектора щодо раніше розглянутого теоретичного матеріалу.

Самостійна робота передбачає опрацювання певного обсягу теоретичного та практичного матеріалу за запропонованими джерелами.

Модульна контрольна робота проводиться письмово і складається з теоретичних завдань та типових задач за пройденим матеріалом.

Критично-розрахунковий мінімум балів за навчання впродовж семестру становить **20** балів,

рекомендований мінімум, розрахований з урахуванням специфіки дисципліни становить **35** балів. Студенти, які протягом семестру набрали сумарно меншу кількість балів ніж рекомендований мінімум **35** балів для підвищення балів отримують можливість написати додаткову контрольну роботу та доскласти домашні завдання. Студенти, які набрали впродовж семестру та за рахунок додаткових етапів оцінювання сумарно меншу кількість балів ніж критично-розрахунковий мінімум – **20** балів, до складання іспиту не допускаються.

Форма іспиту – письмово-усна. Екзаменаційний білет іспиту складається із 4 завдань, перші два з яких є теоретичними, два інших – задачі. Кожне завдання оцінюється від 0 до 8 балів. Додатково від 0 до 8 балів студент отримує за усне опитування. Всього за іспит можна отримати від 0 до 40 балів. Мінімальна кількість балів, які додаються до семестрових – 24 бали.

### Терміни проведення форм оцінювання:

1. Модульна контрольна робота №1: на 6-му тижні 7 семестру.
2. Модульна контрольна робота №2: на 12-му тижні 7 семестру.
3. Оцінювання завдань самостійної роботи за РН2.1-РН2.2 на 6-му тижні, за РН2.3-РН2.4 - на 13 тижні 7 семестру.

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перездачі форм контролю здійснюються у відповідності до „Положення про організацію освітнього процесу в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка” (2018), <http://www.univ.kiev.ua/pdfs/official/Organization-of-the-educational-process.pdf>.

### 7.3. Шкала відповідності оцінок

<b>Відмінно / Excellent</b>	90-100
<b>Добре / Good</b>	75-89
<b>Задовільно / Satisfactory</b>	60-74
<b>Незадовільно / Fail</b>	0-59

## 8. СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ. ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ І ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

теми	Назва теми	Кількість годин				
		Лекції	Практичні заняття	Самост. робота	Консультації	Інші форми контролю
<b>Змістовий модуль 1 «Екстремум в скінченновимірних задачах»</b>						
1	Необхідні та достатні умови екстремуму в скінченновимірних задачах без обмежень та з обмеженнями типу рівностей.	4	2	8		
2	Опуклі задачі мінімізації	4	2	8		
3	Диференціювання функціоналів	4	2	10	1	
<b>Змістовий модуль 2 «Екстремум в нескінченновимірних задачах»</b>						
4	Умови екстремуму в задачах класичного варіаційного числення	6	2	10		

5	Принцип максимуму Понтрягіна в задачах оптимального керування	4	2	10		
6	Метод Беллмана в задачах оптимального керування	4	2	4	1	
Всього годин		26	12	50	2	

### ЗА НАВЧАЛЬНИМ ПЛАНОМ

Загальний обсяг 90 годин, у тому числі:

лекції – 26 годин,

практичні заняття – 12 годин,

консультації – 2 години,

самостійна робота – 50 годин.

#### 9. Рекомендовані джерела

##### Основні:

1. Перестюк М.О., Станжицький О.М., Капустян О.В. Екстремальні задачі: теорія, приклади, методи розв'язання. – К.: ВПЦ Київський університет – 2019.
2. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. – К.: ВПЦ Київський університет – 2010
3. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.:Наука, 1979
4. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М.: Мир, 1974

##### Додаткові:

5. Intriligator M.D. Mathematical Optimization and Economic Theory. SIAM, 2002.
6. Leonard D., Van Long N. Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics. Cambridge University Press, 1992.
7. Weber T.A. Optimal control theory with applications in economics. The MIT Press, 2011.
8. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972